УДК 539.3

ОБЗОР РАБОТ ПО РАЗВИТИЮ И ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ В НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ ПРОБЛЕМАХ

Ясницкий Л. Н.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь

Охарактеризовано современное состояние развития методов решения краевых задач механики сплошных сред. Отмечено, что применяемые в инженерной практике пакеты прикладных программ основаны на методах, приводящих к решениям краевых задач в виде массивов чисел. В качестве недостатка отмечена невозможность надежной оценки погрешности таких решений для большинства сложных инженерных задач. Как альтернатива изложена суть метода фиктивных канонических областей. Показано, что его применение приводит к решениям краевых задач не в виде массивов чисел, а в виде функций, тождественно удовлетворяющих решаемым дифференциальным уравнениям краевых задач. Указано и обосновано основное преимущество метода фиктивных канонических областей, заключающееся в высокой точности получаемых результатов и в возможности надежной оценки их погрешности. Выполнен обзор этапов развития метода фиктивных канонических областей. Выполнен обзор работ, посвященных его применению для решения научных и инженерных задач.

Ключевые слова: краевая задача, аналитический метод, численный метод, погрешность.

REVIEW OF DEVELOPMENT AND APPLICATION OF THE FICTITIOUS CANONIC REGIONS METHOD IN SCIENTIFIC AND ENGINEERING PROBLEMS

Yasnitskiy L. N.

Perm state national research university

The current state of methods of the solution of boundary problems of mechanics of continuous environments is characterized. It is noted that packages of applied programs applied in engineering practice are based on the methods leading to solutions of boundary problems in the form of massifs of numbers. As a shortcoming the impossibility of a reliable assessment of an error of such decisions for the majority of complex engineering challenges is noted. As the alternative is stated an essence of a fictitious canonic regions method. It is shown that its application leads to solutions of boundary problems not in the form of massifs of numbers, but in the form of the functions which are identically satisfying with to the differential equations of boundary problems. The main advantage of the fictitious canonic regions method - high precision of received results and possibility of a reliable assessment of their error. The review of stages of development of the fictitious canonic regions method is executed. The review of the works devoted to its application for the solution of scientific and engineering problems is executed.

Key words: boundary problem, analytical method, numerical method, error.

Решение краевых задач математической физики, начавшееся в конце XVIII, начале XIX в. с основополагающих работ Ж. Л. Д’Аламбера и Ж. Б. Ж. Фурье, уже на протяжении более чем двух веков является одним из ведущих направлений математического моделирования, применяемого в научных исследованиях и в инженерных расчетах. Эволюция развития методов решения краевых задач привела к тому, что к началу XXI в. и по настоящее время подавляющее большинство инженерных задач решаются с применением универсальных пакетов, реализующих численные методы. Эти пакеты позволяют инженерам решать краевые задачи практически любой сложности. Но в последнее время возникла серьезная проблема: как показано в [9, 25, 26, 28, 35], оценить погрешности таких численных решений для сложных инженерных задач, как правило, не представляется возможным. В работах [9, 23, 26, 28, 35] эта ситуация оценена как современный кризис прикладной математики. Именно проблема оценки погрешности является серьезнейшим недостатком численных методов, что делает актуальным поиск иных, более надежных методов и подходов.

В работе [33] предложен альтернативный метод решения краевых задач, приводящий к решениям не в виде чисел, а в виде аналитических формул, тождественно удовлетворяющих решаемым дифференциальным уравнениям. Впоследствии этот метод получил название метода фиктивных канонических областей (ФКО) [6-22, 23-32, 34-36, 39, 40], а в качестве его основного преимущества декларируется высокая точность и возможность надежной оценки погрешности [6, 8-10, 13, 20, 22, 24-26, 28, 32, 35, 38-40].

В общем виде постановку линейной краевой задачи представим следующим образом. Требуется найти функцию $U(\mathrm{x})$, удовлетворяющую в пределах некоторого тела D дифференциальному уравнению в частных производных

$$L\,U(\mathrm{x}) = L^*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in D, \tag{1}$$

а на поверхности S тела D – граничным условиям

$$B\,U(\mathrm{x}) = B^*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in S, \tag{2}$$

где L и B – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; $L^*(\mathrm{x})$ и $B^*(\mathrm{x})$ – заданные функции координат x.

Суть метода ФКО состоит в следующем. Пусть требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние упругого тела D, изображенного на рисунке 1, *а*. На поверхности S тела D заданы граничные условия в перемещениях или (и) в напряжениях.

Наряду с D в рассмотрение вводится некоторая фиктивная каноническая область V, (либо – в область пересечения канонических областей на рис. 1, *в*), внутри которой мысленно (на рис. 1 – пунктиром) выделяются контуры заданного тела. Поскольку область V является канонической, то для нее методом разделения переменных Фурье можно построить решение дифференциальных уравнений (например, уравнений теории упругости), имеющее вид ряда

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} c_n U_n(\mathbf{x}), \qquad N \to \infty, \qquad \mathbf{x} \in V, \tag{3}$$

в котором $U_n(\mathbf{x})$ – координатные функции, которые, в силу специфики метода разделения переменных Фурье, тождественно удовлетворяют дифференциальному уравнению краевой задачи, а c_n – постоянные коэффициенты, определяемые граничными условиями на поверхности области V. Это решение является общим в том смысле, что путем подбора постоянных коэффициентов c_n из него могут быть выделены частные решения, удовлетворяющие достаточно произвольным граничным условиям на поверхности тела V. Если теперь на этой поверхности создать такое нагружение P, что на контурах вписанного тела возникнут напряжения или (и) перемещения, совпадающие с заданными на S граничными условиями, то решение для V, соответствующее нагружению P, будет в то же время являться решением исходной задачи для тела D. Последнее справедливо в силу того, что выделенное из (3) частное решение удовлетворяет внутри тела D уравнениям теории упругости, а на его поверхности – заданным граничным условиям.

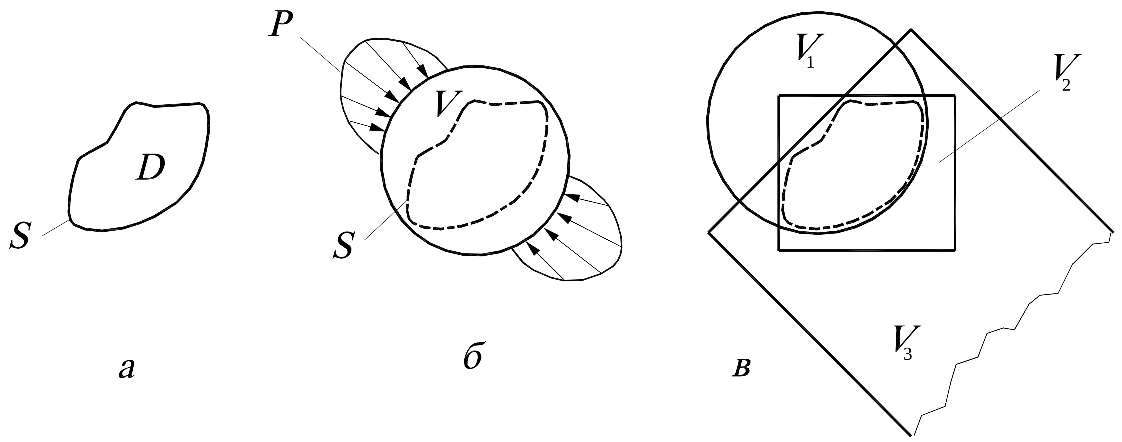

Рисунок 1. Заданное тело D (а) мысленно погружается в каноническую область V (*б*) или в область пересечения нескольких канонических областей: $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ (*в*)

Согласно изложенному выше, решение, полученное методом ФКО, тождественно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1) и приближенно – краевым условиям (2). Это значит, что вместо краевой задач (1)-(2) метод ФКО приводит к точному аналитическому решению некоторой другой краевой задачи с несколько измененными краевыми условиями:

$$L\,U(\mathbf{x}) = L^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \tag{4}$$

$$B\,U(\mathbf{x}) = B^{**}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \tag{5}$$

Причем, разницу между заданным граничным значением $B^*(\mathbf{x})$ и измененным граничным значением $B^{**}(\mathbf{x})$ в каждом конкретном случае можно легко подсчитать. Для этого достаточно подставить получившееся в результате применения метода ФКО решение в левую часть формулы (2) и, произведя вычисления этой части на границе расчетной области (при $\mathbf{x} \in S$), воссоздать постановку измененной краевой задачи, которую методом ФКО удалось решить точно. И, наконец, можно всегда оценить с инженерной точки зрения возможность изменения самой постановки краевой задачи – подмены исходной краевой задачи (1)-(2) на измененную краевую задачу (4)-(5). И если такая подмена задач с инженерной точки зрения возможна, то вопрос об оценке погрешности решения, полученного методом ФКО, снимается в принципе.

Геометрическая интерпретация процесса решения краевой задачи, представленная на рисунке 1, предложенная в работе [33], позволила в этой же работе дать формулировку и первое доказательство теоремы сходимости для двумерного случая, предложить на этой основе критерий и методику выбора базисных функций, предложить и обосновать способы оценки погрешности решений краевых задач, т.е. построить теоретические основы математического аппарата метода ФКО [32, 40]. Для трехмерного случая теорема сходимости метода ФКО была доказана С. Я. Гусманом в работе [16]. А. Ю. Большаковым и В. А. Елтышевым [5] при выборе ФКО предложено пользоваться условием топологической эквивалентности между D и V, что на определенных классах задач оказывается полезным. Существенное развитие метода ФКО выполнено С. Л. Гладким, предложившем и реализовавшем алгоритм оптимального выбора центров ФКО как результат решения оптимизационной задачи [9, 12], а также развившем и применившем метод ФКО для решения пространственных задач теплопроводности [14], задач термоупругости [6] и задач электростатики [11]. Перспективы дальнейшего развития метода ФКО и совершенствования его программно-инструментальной базы видятся в активном применении приемов и методов искусственного интеллекта [9, 20, 25, 26-28, 34].

Метод ФКО успешно применен для расчета ряда инженерных конструкций ответственного назначения [1-5, 8-10, 17-19, 21-22, 24, 25, 26, 28-32, 36, 40], для оптимизации технологических процессов [9, 15], для решения научных проблем [6, 11, 13-14]. Математическое моделирование инженерных объектов с помощью метода ФКО позволило решить многие научно-технические проблемы, в частности, оптимизировать процесс микродугового оксидирования цилиндров поршневых двигателей [9, 15], предложить новую равнопрочную геометрическую форму накопителя кинетической энергии [18, 32, 36], предложить оригинальное конструктивное исполнение пильной шины цепной пилы [3], разработать саморегулирующиеся плунжерные пары поршневых двигателей [19, 21], предложить оригинальные конструктивные решения и выполнить оптимальное проектирование задвижек с керамическими запорно-регулирующими элементами [1, 2], объяснить причины неудачных стартов некоторых космических ракет [9, 26, 28] и др.

Список литературы

1. Акмалов М. Р., Симакина Н. И., Ясницкий Л. Н. Компьютерное моделирование напряженного состояния и оптимизация формы керамических запорных элементов трубопроводной арматуры // Динамика и прочность машин. Вестник Вестник Пермского государственного технического университета. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2000. С.123-129.

2. Акмалов Р. З., Ясницкий Л. Н. Задвижки с керамическими запорно-регулирующими элементами и особенности их проектирования // Изв.ВУЗов. Машиностроение. 2001. №5. С.27-34.

3. Ашманов В. Д., Ощепков В. А., Петенко В. И., Ясницкий Л. Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния полотна пильной шины // Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ. №4. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2003. С.70-78.

4. Ашманов В. Д., Ощепков В. А., Ясницкий Л. Н. Новая конструкция многослойного полотна шины цепной пилы // Известия вузов. Машиностроение. 2004. N 6. С. 28-36.

5. Большаков А. Ю., Елтышев В. А. О решении пространственных задач теории упругости методом Фурье // Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости. Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1983. С.83-88.

6. Гладкий С. Л. Ясницкий Л. Н. Решение задач линейной термоупругости методом фиктивных канонических областей // Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ. №4. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2003. С.79-90.

7. Гладкий С. Л., Семенова А. В., Степанов Н. А., Ясницкий Л. Н. Компьютерное моделирование и оптимизация процесса получения искусственно-керамических покрытий // Вестник Пермского государственного технического университета. Динамика и прочность машин. Вып.5. Пермь: Изд-во ПГПУ, 2005. С.142-149.

8. Гладкий С. Л., Симакина Н. И. Ясницкий Л. Н. О возможностях метода фиктивных канонических областей для решения задач теории упругости // Динамика и прочность машин. Вестник Пермского государственного технического университета. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2000. С.114-122.

9. Гладкий С. Л., Степанов Н. А., Ясницкий Л. Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем / Под ред. Л. Н.Ясницкого. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 200 с.

10. Гладкий С. Л., Таланцев Н. Ф., Ясницкий Л. Н. Верификация численных расчетов методом фиктивных канонических областей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2006. № 4. С.18-27.
11. Гладкий С. Л., Тарунин Е. Л., Ясницкий Л. Н. Применение метода фиктивных канонических областей в задачах электростатики // Вестник Пермского университета. Физика. 2011. Вып. 3(18). С.96-102.
12. Гладкий С. Л., Ясницкий Л. Н. Алгоритмы оптимизации базисных разложений в методе фиктивных канонических областей // Динамика и прочность машин. Вестник Вестник Пермского государственного технического университета №3. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2001. С.131-141.
13. Гладкий С. Л., Ясницкий Л. Н. Об оценке погрешности метода фиктивных канонических областей // Известия АН. Механика твердого тела. 2002. №6. С.69-75.
14. Гладкий С. Л., Ясницкий Л. Н. Решение трехмерных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Вып.1(5). Пермь: Изд. Пермского ун-та, 2011. С.41-45.
15. Горчаков А. И., Семенова А. В., Сыроватская Ю. В., Щербаков Ю. В., Ясницкий Л. Н. Влияние геометрических параметров микродугового оксидирования на равномерность покрытий, формируемых на алюминиевых сплавах // Физика и химия обработки материалов. 2004. № 1.С.43-47.
16. Гусман С. Ч., Ясницкий Л. Н. Обоснование выбора фиктивных канонических областей. // Вестник Пермского университета. Математика, информатика, механика. 1994. Вып.1. С.55-65.
17. Добрынин Г. Ф., Ясницкий Л. Н. Прочностные расчеты изоляторов // Стекло и керамика. 1994. №7. С.40-42.
18. Кирко И. М., Терровере В. Р., Ясницкий Л. Н. Новая оптимальная форма маховичного накопителя // Доклады АН СССР. Техническая физика. 1989. Т.307. №6. С.1373-1375.
19. Клименко И. П., Ясницкий Л. Н. К расчету деформированного состояния втулки плунжерной пары методом фиктивных канонических областей // Известия вузов. Машиностроение. 1991. №4-6. С.32-34.
20. Тарантина А. В., Ясницкий Л. Н. Влияние расположения особых точек искомого решения на сходимость метода фиктивных канонических областей. Численные иллюстрации // Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ. №4. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2003. С.47-55.

21. Томилов В. А., Клименко И. П., Ясницкий Л. Н. Стабилизация величины зазора плунжерной пары за счет упругих деформаций плунжера // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С.109-113.
22. Салахутдинов Ф. Г., Гладкий С. Л., Ясницкий Л. Н. О компьютерном моделировании конструкций ответственного назначения // Вестник Вестник Пермского государственного технического университета. №3. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2001. С.142-144.
23. Филиппов Н. А. Математический путь к лучшей количественной информационной технике // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 7. С. 71-83. (О кризисе).
24. Ясницкий Л. Н. Аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тел сложной конфигурации // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд-во Пермского политехнического ин-та, 1988. С.16-23.
25. Ясницкий Л. Н., Бондарь В. В., Бурдин С. Н. и др. Пермская научная школа искусственного интеллекта и ее инновационные проекты. 2-е изд. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 75 с.
26. Ясницкий Л. Н. Введение в искусственный интеллект. Изд. 3. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 176 с.
27. Ясницкий Л. Н. Возможности и перспективы применения методов искусственного интеллекта в механике сплошных сред // Динамика и прочность машин. Вестник Пермского государственного технического университета. №3. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2001. С.150-164.
28. Ясницкий Л. Н., Данилевич Т. В. Современные проблемы науки. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 294 с.
29. Ясницкий Л. Н. Задвижки с керамическими запорно-регулирующими элементами - новое направление в арматуростроении // Трубопроводная арматура и оборудование. №2(5). 2003. С.7-8.
30. Ясницкий Л. Н. К расчету напряженного состояния эллипсоидальной оболочки постоянной и переменной толщины на основе решений теории упругости для сферических областей // Прикладная механика. 1989. Т.25. №6. С.111-114.
31. Ясницкий Л. Н. Композиция расчетной области в методе фиктивных канонических областей // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. №6. С.168-172.
32. Ясницкий Л. Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред. М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1992.128 с.

33. Ясницкий Л. Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд. Пермского политехнического ин-та, 1973. С.78-83.
34. Ясницкий Л. Н. Принципы построения экспертной системы для аналитического решения краевых задач // Математика программных систем. Межвузовский сборник научных трудов. Пермь: Изд-во ПГУ, 2001. С.105-114.
35. Ясницкий Л. Н. Современный кризис прикладной математики и перспективы его преодоления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Пермь: Изд. Пермского ун-та, 2007. Вып.7 (12). С. 192-197.
36. Ясницкий Л. Н. Суперпозиция базисных решений в методах типа Треффтца // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. №2. С.95-101.
37. Trefftz E. Ein Gegenstuck zum Ritzschen Verfahren // Verhandl des 2. Intern. Kongress fur tehnische Mechanik. Zurich, Sept., 1926. P. 12-17.
38. Yasnitsky L. N. The possibilities of error estimation in the boundary element type methods // Boundary Elements Communications. 1994. V.5. №4. P.181-182.
39. Yasnitsky L. N. Fictitious canonic regions method and boundary elements method // Boundary Elements Communications. 1995. V.6. №2. P.62-63.
40. Yasnitsky L. N. Fictitious canonic regions method. Southampton; Boston: Computational Mechanics Publications, 1994. 120 p.

Рецензенты:
Шварц Константин Григорьевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.
Пенский Олег Геннадьевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры процессов управления и компьютерной безопасности, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.
Кирьянов Борис Фёдорович, д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, ФГБОУ ВПО Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород.